ปัญหาข้อที่ 1. จงให้คำนิยามสำหรับข้อความต่อไปนี้

1. การหารลงตัว
2. จำนวนคู่
3. จำนวนเฉพาะ
4. จำนวนตรรกยะ
5. สับเซต
6. ขอบเขตบน (ของเซต S)
7. ขอบเขตบนน้อยสุด
8. ขอบเขตล่าง
9. ขอบเขตล่างมากสุด
10. อินเทอร์เซคชั่นใด ๆ $\bigcap_{i\in I} A_i$ (อาร์บิทารี่อินเทอร์เซคชั่น)
11. ยูเนียนใด ๆ $\bigcup_{i\in I} A_i$ (อาร์บิทารี่ยูเนี่ยน)
12. ผลแบ่งกั้น
13. ผลคูณคาร์ทีเชี่ยนของ $A \times B$
14. คู่อันดับ
15. ความสัมพันธ์บทเซต A
16. ฟังก์ชันระหว่างเซต $A \to B$
17. ฟังก์ชัน 1-1
18. ฟังก์ชันทั่วถึง

ปัญหาข้อที่ 2. จงอธิบายทฤษฎีบทต่อไปนี้

1. ขั้นตอนวิธีการหาร
2. หลักการจัดอันดับดี
3. หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
4. หลักอาร์คิมิเดียน
5. สมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง
6. ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต
7. สมบัติขอบเขตบนน้อยสุด

ปัญหาข้อที่ 3. การอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $C \to (D \to (A \vee B))$

2. $\sim (A \vee B)$

ผล $D \to \sim C$

1 เซต

ปัญหาข้อที่ 4. จงแสดงว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

ปัญหาข้อที่ 5. จงแสดงว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

ปัญหาข้อที่ 6. จงแสดงว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ และ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ปัญหาข้อที่ 7. จงแสดงว่า $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ก็ต่อเมื่อ $C \subseteq A$

ปัญหาข้อที่ 8. จงแสดงว่า $A - (A - B) = A \cap B$ เมื่อ $A - B$ เป็นการลบกันของเซต

ปัญหาข้อที่ 9. จงแสดงว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \varnothing$

ปัญหาข้อที่ 10. จงแสดงว่า $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ปัญหาข้อที่ 11. จงแสดงว่า $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(E \cap F)$ และ $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subseteq \mathscr{P}(E \cup F)$ เมื่อ $\mathscr{P}(A)$ คือพาวเวอร์เซตของ A

2 ทฤษฎีจำนวน

ปัญหาข้อที่ 12. จงแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

ปัญหาข้อที่ 13. จงแสดงว่า $n^3 + 3n$ เป็นจำนวนคู่เสมอ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

ปัญหาข้อที่ 14. จงแสดงว่าผลคูณของจำนวนเต็มที่เรียงติดกัน 3 ตัวจะหารด้วย 3 ลงตัว

ปัญหาข้อที่ 15. จงพิสูจน์ว่า $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n(4n^2 - 1)/3$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ปัญหาข้อที่ 16. จงพิสูจน์ว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (n(n+1)/2)^3$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ปัญหาข้อที่ 17. มีจำนวนนับอยู่ระหว่าง 0 และ 1 หรือไม่

ปัญหาข้อที่ 18. จงแสดงว่า ถ้า $a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

ปัญหาข้อที่ 19. จงแสดงว่า ถ้า $a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a + b = c$ และ $a|b$ แล้ว $a|c$

ปัญหาข้อที่ 20. จงแสดงว่า ถ้า $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $c|ax + by$ และ $c|a$ แล้ว $c|b$

ปัญหาข้อที่ 21. (ยาก) จงแสดงว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p|ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ แล้ว $p|a$ หรือ $p|b$

ปัญหาข้อที่ 22. จงแสดงว่า $6|(7^n - 1)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

ปัญหาข้อที่ 23.
- จงแสดงว่า 3 หาร $n(2n^2 + 7)$ ทุกจำนวนนับ n
- จงแสดงว่า ทุกจำนวนนับ n ใด ๆ $5^{2n} + 7$ หารด้วย 8 ลงตัว
- จงแสดงว่า 7 หาร $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ลงตัวทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

3 ระบบจำนวนจริง

ปัญหาข้อที่ 24. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ ใด ๆ $a + \epsilon > b$ แล้ว $a \geq b$

ปัญหาข้อที่ 25. จงแสดงว่าเซต $E = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ ไม่มีค่ามากสุดในเซตนี้

ปัญหาข้อที่ 26. จงแสดงว่าถ้าเซต S มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้วจะมีขอบเขตบนน้อยสุดเพียงค่าเดียว

ปัญหาข้อที่ 27. ใช้หลักของอาร์คิมีดีสแสดงว่า $\frac{1}{n} \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

ปัญหาข้อที่ 28. จงแสดงว่าสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ที่ $x \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง y ที่ทำให้ $xy = x + 1$

ปัญหาข้อที่ 29. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าจำนวนนับทุกจำนวน

ปัญหาข้อที่ 30. ถ้า $\mathbb{F}$ เป็นเซตที่มีสมบัติขอบเขตบนน้อยสุด (LUP) ที่ว่า ถ้า $S \subseteq \mathbb{F}$ ไม่เป็นเซตว่าง และ ถ้า S มีขอบเขตบน แล้วจะมีขอบเขตบนน้อยสุด

จงแสดงว่า $\mathbb{F}$ มีสมบัติขอบเขตล่างมากสุด

ปัญหาข้อที่ 31. กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยที่ $x > 0$ จงแสดงว่ามีจำนวนนับ n ที่ทำให้

$$nx > y$$

ปัญหาข้อที่ 32. สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}$ ที่ $x < y$ จะมี $p \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้ $x < p < y$

ปัญหาข้อที่ 33. จงแสดงว่า $|a| + |b| \geq |a + b|$ สำหรับทุก $a, b \in \mathbb{R}$

ปัญหาข้อที่ 34. จงแสดงว่า $|y - x| \geq |y| - |x|$

ปัญหาข้อที่ 35. จงแสดงว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

ปัญหาข้อที่ 36. จงพิสูจน์ว่าผลรวมของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

ปัญหาข้อที่ 37. จงแสดงว่า ถ้า $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว จะมี $m, n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \epsilon$

4 ฟังก์ชัน

ปัญหาข้อที่ 38. กำหนดให้ $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

- มีความสัมพันธ์บนเซต A_1 กี่ความสัมพันธ์ทั้งหมด
- ทำเช่นกันสำหรับ A_2, A_3
- ใช้หลักอุปนัยพิสูจน์ว่า จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดบน A_n คือ $2^{(n^2)}$

ปัญหาข้อที่ 39. ผลแบ่งกั้นทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $\{1, 2, 3\}$ เป็นเท่าไหร่

ปัญหาข้อที่ 40. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต S จะเรียก R ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็เมื่อ

- (สมบัติสะท้อน) aRa ทุก $a \in S$
- (สมบัติสมมาตร) ถ้า aRb แล้ว bRa สำหรับทุก ๆ $a, b \in S$
- (สมบัติถ่ายทอด) ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc

และกำหนดให้ $[a] = \{b \in S \mid bRa\}$ จงแสดงว่า R แบ่งกั้น S โดยมีผลแบ่งกั้นคือ $\mathscr{P} = \{[a_1], [a_2], \ldots\}$

ปัญหาข้อที่ 41. ให้ $f : A \to B$ และ $A_0 \subseteq A, \quad B_0 \subseteq B$

- จงแสดงว่า $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$ และสองเซตนี้เท่ากันเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
- จงแสดงว่า $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$ และสองเซตนี้เท่ากันเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ปัญหาข้อที่ 42. ให้ f, g, h เป็นฟังก์ชันที่ $f : A \to B, g : B \to A$ และ $h : B \to A$ โดยมีสมบัติว่า $g(f(a)) = a$ ทุก $a \in A$ และ $f(h(b)) = b$ ทุก $b \in B$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง และ $g = h = f^{-1}$

ปัญหาข้อที่ 43. ให้ $f : A \to B$ และ $B_0, B_1 \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$

ปัญหาข้อที่ 44. ให้ $f : A \to B$ และ $A_0, A_1 \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า $f(A_0 \cap A_1) \subseteq f(A_0) \cap f(A_1)$

ปัญหาข้อที่ 45. สำหรับ $f : A \to B$ จงแสดงว่า ถ้ามีฟังก์ชัน $g : B \to A$ ที่ทำให้ $g \circ f(a) = a$ ทุก $a \in A$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ปัญหาข้อที่ 46. จงแสดงว่า ถ้า $f : A \to B, g : B \to C$ เป็นฟังก์ชัน และ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ปัญหาข้อที่ 47. จงแสดงว่า ถ้า $f : A \to B, g : B \to C$ เป็นฟังก์ชัน และ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง